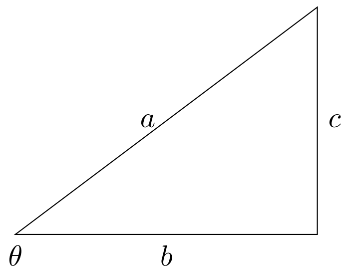
Trigonometría
Matemáticas

Dani Pérez

Febrero 2025

1 Triángulo y razones trigonométricas

Consideremos un triángulo rectángulo con ángulo θ:

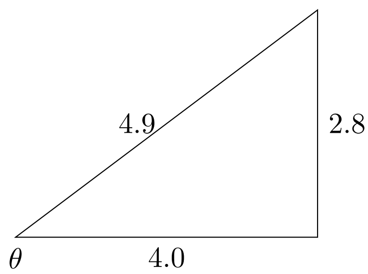


Las razones trigonométricas son:

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

Ejemplo

1. Dado el siguiente triángulo rectángulo obtenga las principales razones trigonométricas:



Las principales razones trigonométricas son:

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2.8}{4.9} \approx 0.57$$
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4.0}{4.9} \approx 0.82$$
$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2.8}{4.0} = 0.7$$

2 Identidades trigonométricas fundamentales

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
3. $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
4. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Ejemplo

2. Dado que $\sin\theta = 0.6$ obtenga, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Solución

Sabiendo que $\sin\theta = 0.6$, utilizamos la identidad fundamental:

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\
(0.6)^2 + \cos^2\theta &= 1 \\
0.36 + \cos^2\theta &= 1 \\
\cos^2\theta &= 1 - 0.36 \\
\cos^2\theta &= 0.64 \\
\cos\theta &= \pm 0.8
\end{aligned}$$

Si θ está en el primer o cuarto cuadrante, tomamos $\cos\theta = 0.8$.
Ahora calculamos $\tan\theta$:

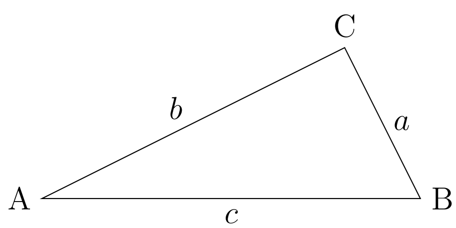
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

Por lo tanto, $\cos\theta = 0.8$ y $\tan\theta = 0.75$.

3 Teorema del seno

El teorema del seno establece que en cualquier triángulo, la razón entre un lado y el seno de su ángulo opuesto es constante:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{1}$$

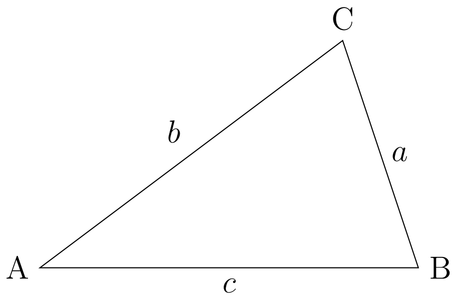


Este teorema es útil para encontrar lados o ángulos cuando tenemos suficiente información.

4 Teorema del coseno

El teorema del coseno es una generalización del teorema de Pitágoras y se aplica en triángulos no rectángulos:

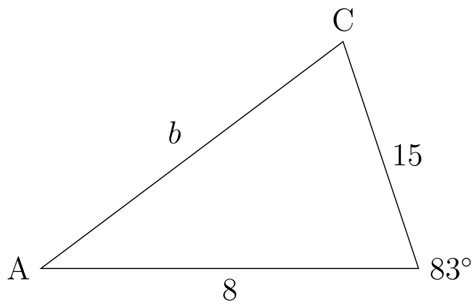
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{2}$$



Se usa para determinar un lado cuando conocemos los otros dos y el ángulo entre ellos, o para encontrar un ángulo cuando conocemos los tres lados.

Ejemplo

Dado el siguiente triángulo, obtenga todos los lados y ángulos restantes.



Solución

Aplicamos el teorema del coseno para encontrar el lado b:

$$\begin{aligned} b^2 &= 8^2 + 15^2 - 2(8)(15)\cos 83^\circ \\ &= 64 + 225 - 240\cos 83^\circ \\ &= 64 + 225 - 240(0.1392) \\ &= 64 + 225 - 33.408 \\ &= 255.592 \\ b &= \sqrt{255.592} \approx 15.99 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lado b mide aproximadamente 16 unidades. Una vez tenemos el lado b, ya podemos usar el teorema del seno, ya que, tenemos el lado b y el ángulo B. Para encontrar el ángulo A, aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{8}{\sin A} = \frac{15.99}{\sin 83^\circ}$$

Despejamos $\sin A$:

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{8\sin 83^\circ}{15.99} \\ &= \frac{8(0.9925)}{15.99} \\ &= \frac{7.94}{15.99} \\ &= 0.4967 \end{aligned}$$

Calculamos A:

$$A = \arcsin(0.4967) \approx 29.8^\circ$$

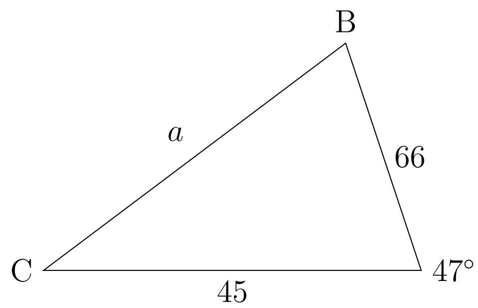
Finalmente, el tercer ángulo C se obtiene por la suma de los ángulos internos del triángulo:

$$C = 180^\circ - 83^\circ - 29.8^\circ = 67.2^\circ$$

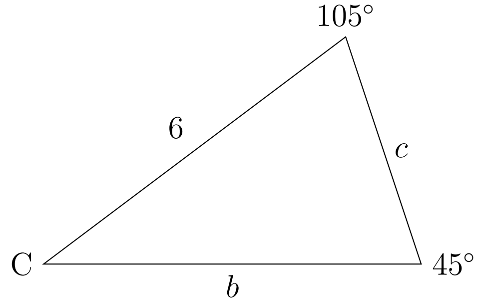
Por lo tanto, los ángulos del triángulo son aproximadamente $A = 29.8^\circ$, $B = 83^\circ$ y $C = 67.2^\circ$.

5 Ejercicios propuestos

1. De un ángulo agudo se sabe que su seno es $\frac{3}{5}$. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones.
2. De un triángulo sabemos que $b = 45$, $c = 66$ y $\alpha = 47^\circ$. Calcula los restantes elementos.



3. Se tiene un triángulo cuyo lado a mide 6 m, $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 105^\circ$. Calcule los elementos restantes.



4. Sabiendo que $\sin 25^\circ = 0.42$, $\cos 25^\circ = 0.91$ y $\tan 25^\circ = 0.47$, halla (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora) las razones trigonométricas de 155° y de 205°.